OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8 FEBRUARIE 2026

CLASA A XII-a

Soluții și bareme de corectare

SUBIECTUL I (40 de puncte)

Subiect	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Răspuns corect	B	B	A	B	E	C	D	C	C	B
	4p	4p	4p	4p	4p	4p	4p	4p	4p	4p

SUBIECTUL II (25 de puncte)

Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât mulțimea $A=[a,+\infty)$ să fie parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție:

$$x\circ y=xy+x+y\text{, pentru orice } x,y\in\mathbb{R}.$$

Supliment Gazeta Matematică nr. 9 / 2025

Soluție.

Cum A este parte stabilă și $a\in A$, rezultă că $a\circ a\in A\Leftrightarrow a^2+2a\geq a\Leftrightarrow a^2+a\geq 0\Leftrightarrow a\in(-\infty,-1]\cup[0,\infty)$.

Așadar, dacă A este parte stabilă, este necesar (dar nu neapărat și suficient) ca $a\in(-\infty,-1]\cup[0,\infty)$ **6p**

Vom verifica pentru ce valori $a\in(-\infty,-1]\cup[0,\infty)$, mulțimea $A=[a,\infty)$ este într-adevăr parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$ ”.

Dacă $a\geq 0$, este evident că pentru orice $x,y\geq a\geq 0$, avem $x\circ y=xy+x+y\geq a^2+2a\geq a$, deci $x\circ y\in A$.

Ca urmare, pentru orice $a\geq 0$, mulțimea A este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$\circ$ ” **6p**

Dacă $a=-1$, atunci $A=[-1,\infty)$ și $x\circ y=xy+x+y=(x+1)(y+1)-1\geq -1$, pentru orice $x,y\geq -1$, deci $x\circ y\in A$, adică A este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$\circ$ ” și pentru $a=-1$ **6p**

Dacă $a<-1$, atunci avem $a\in A$ și $1\in A$, dar $a\circ 1=2a+1=a+(a+1)<a$, deoarece $a+1<0$, deci $a\circ 1\notin A$.

Ca urmare, pentru $a\in(-\infty,-1)$, mulțimea A nu este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$\circ$ ” **6p**

În concluzie, mulțimea $A=[a,\infty)$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$ ” dacă și numai dacă $a\in\{-1\}\cup[0,\infty)$ **1p**

SUBIECTUL III (25 de puncte)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu derivata continuă, și $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Calculați limitele:

a) $L_1=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_a^b\big(f(x+h)-f(x)\big)\mathrm{d}x$;

b) $L_2=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_a^b\big(f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)\big)\mathrm{d}x$.

Soluție. a) Cum f este continuă, rezultă că f admite primitive. Considerând o primitivă F a lui f, rezultă că:

$$\int_a^b\big(f(x+h)-f(x)\big)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x+h)\cdot(x+h)'\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x+h)\big|_a^b-F(x)\big|_a^b=$$

$$=F(b+h)-F(a+h)-F(b)+F(a)=\big(F(b+h)-F(b)\big)-\big(F(a+h)-F(a)\big)$$

..... **10p**

Obținem:

$$L_1=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b\big(f(x+h)-f(x)\big)\mathrm{d}x=\lim_{h\to 0}\left(\frac{F(b+h)-F(b)}{h}-\frac{F(a+h)-F(a)}{h}\right)=F'(b)-F'(a)=f(b)-f(a)$$

..... **5p**

b) Ca la punctul anterior, deducem că:

$\int_a^b\big(f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)\big)\mathrm{d}x=\big(F(b+2h)-2F(b+h)+F(b)\big)-\big(F(a+2h)-2F(a+h)+F(a)\big)$, deci

$$L_2=\lim_{h\to 0}\left(\frac{F(b+2h)-2F(b+h)+F(b)}{h^2}-\frac{F(a+2h)-2F(a+h)+F(a)}{h^2}\right)$$ **5p**

Ținând cont de continuitatea funcțiilor F, f și f', și folosind regula lui L'Hôspital, cazul $\left[\frac{0}{0}\right]$, avem:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(b+2h)-2F(b+h)+F(b)}{h^2}\overset{L'H}{=\!=}\lim_{h\to 0}\frac{F'(b+2h)\cdot(b+2h)'-2F'(b+h)\cdot(b+h)'}{2h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(b+2h)-f(b+h)}{h}\overset{L'H}{=\!=}\lim_{h\to 0}\big(2f'(b+2h)-f'(b+h)\big)=f'(b)$$

și analog, $\lim_{h\to 0}\frac{F(a+2h)-2F(a+h)+F(a)}{h^2}=f'(a)$, deci $L_2=f'(b)-f'(a)$ **5p**